ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 145 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ
© Бурлаков Е.О., Верхлютов В.М., Мальков И.Н., 2024
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-43-50

УДК 517.988, 517.968, 51-76

О корректности математической модели вызванной активности первичной зрительной коры

Евгений Олегович БУРЛАКОВ[1,2], **Виталий Михайлович ВЕРХЛЮТОВ**[3], **Иван Николаевич МАЛЬКОВ**[1,2]

[1] ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»
625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6

[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

[3] ФГБУН «Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН»
117485, Российская Федерация, г. Москва, ул. Бутлерова, 5А

Аннотация. В работе предлагается математическая модель, формализующая макро- и мезоуровневую динамику электрических потенциалов в первичной зрительной коре испытуемых, отвечающую предъявлению им визуальных стимулов. В основе математического аппарата лежит двухслойная модель нейронного поля, представленная системой интегро-дифференциальных уравнений, в которой глубинный слой нейронного поля моделирует электрическую активность, не зависящую напрямую от пространственной ориентации визуальных стимулов, а активность поверхностного слоя чувствительна к пространственно ориентированным стимулам. Схема эксперимента по предъявлению серии визуальных стимулов описывается в настоящем исследовании с помощью задачи импульсного управления для упомянутой двухслойной модели нейронного поля. Предлагается специальное метрическое пространство, с помощью которого показывается однозначная разрешимость задачи управления в стандартных для математической нейробиологии предположениях относительно функций, входящих в моделирующие уравнения. Формулируются достаточные условия непрерывной зависимости решений от импульсных управляющих воздействий.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, нелинейные интегральные уравнения, двухслойная модель нейронного поля, импульсное управление, корректность

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00756, https://rscf.ru/project/22-21-00756/).

Для цитирования: *Бурлаков Е.О., Верхлютов В.М, Мальков И.Н.* О корректности математической модели вызванной активности первичной зрительной коры // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 43–50.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-43-50

SCIENTIFIC ARTICLE
© E. O. Burlakov, V. M. Verkhlyutov, I. N. Malkov, 2024
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-43-50

On well-posedness of a mathematical model of evoked activity in the primary visual cortex

Evgenii O. BURLAKOV[1,2], **Vitaly M. VERKHLYUTOV**[3], **Ivan N. MALKOV**[1,2]
[1] Tyumen State University
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[3] Institute of Higher Nervous Activity and Neurophysiology of RAS
5A Butlerova St., Moscow 117485, Russian Federation

Abstract. We propose a mathematical model that formalizes the macro- and meso-level dynamics of electrical potentials in the primary visual cortex of subjects, which corresponds to the presentation of visual stimuli to them. The mathematical framework is based on a two-layer neural field model, represented by a system of integro-differential equations, where the deep layer of the neural field models electrical activity that does not depend directly on the spatial orientation of the visual stimuli, whereas the activity of the superficial layer is sensitive to spatially oriented stimuli. The experimental design of presenting a series of visual stimuli is formalised in the present study in terms of an impulse control problem for the aforementioned two-layer neural field model. We propose a special metric space for construction of a unique solution to the control problem under standard assumptions for mathematical neurobiology regarding the functions involved in the modeling equations. We formulate sufficient conditions for continuous dependence of the solutions on the impulse control.

Keywords: integro-differential equations, nonlinear integral equations, bi-laminar neural field model, impulsive control, well-posedness

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00756, https://rscf.ru/en/project/22-21-00756/).

Mathematics Subject Classification: 37N25, 34K35.

For citation: Burlakov E.O., Verkhlyutov V.M., Malkov I.N. On well-posedness of a mathematical model of evoked activity in the primary visual cortex. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 43–50.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-43-50 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Зрительная кора является одной из наиболее изученных нейрофизиологами структур головного мозга. «Зрительный путь» начинается от светочувствительных и ганглинарных клеток сетчатки и, продолжаясь в коленчатые ядра зрительных бугров, заканчивается в первичной зрительной коре.

Функциональная микроструктура первичной зрительной коры была открыта Д. Хьюбелом и Т. Визелем [1], получившими за это в 1981 году Нобелевскую премию. Несмотря на существенную по времени историю вопроса, до сих пор продолжаются исследования структуры и функций зрительной коры. Открытие Хьюбелом и Визелем ориентационных колонок, отвечающих за избирательное восприятие направленных линий, расположенных параллельно корковой поверхности, позже было дополнено идентификацией объединяющих их гиперколонок. Если активность нейронов ориентационных колонок возможно регистрировать внутриклеточными электродами, то гиперколонки можно идентифицировать только при оптическом картировании [2].

Наряду с визуализацией гиперколонок, оптическое картирование выявило синхронную работу больших популяций нейронов в виде электрической активации, распространяющейся вдоль поверхности коры [3]. Подобная активация обладает богатой пространственно-временной динамикой, включающей сложные и разнообразные волновые паттерны, такие как бегущие и спиральные волны [4]. Ввиду обусловленности данной активности синхронизацией нейронов на значительных площадях коры, она может быть зарегистрирована макроэлектродами (ЭЭГ) или магнитными датчиками (МЭГ). Таким образом, имеется возможность судить о работе функциональной микроструктуры зрительной коры, например, на основании взаимодействия с ней двумерных волн электрических потенциалов, регистрируемых МЭГ и ЭЭГ [5].

Целью данной работы является построение математической модели динамики электрических потенциалов в первичной зрительной коре испытуемых при предъявлении им визуальных стимулов (в том числе задействующих ориентационные колонки пространственно ориентированных стимулов).

Основой используемого математического аппарата является следующая модель двухслойного нейронного поля, формализующая электрическую активность первичной зрительной коры головного мозга, предложенная в работе [6] и изученная с математической точки зрения в [7]:

$$
\begin{aligned}
\partial_t u_{\mathrm{d}}(t,x) &= -\tau_{\mathrm{d}} u_{\mathrm{d}}(t,x) + \int\limits_{\Omega} \omega_{\mathrm{d}}(x,y) f_{\mathrm{d}}(u_{\mathrm{d}}(t,y))dy + \nu_{\mathrm{d}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{\mathrm{s}}(u_{\mathrm{s}}(t,x,\psi))d\psi,\\
\partial_t u_{\mathrm{s}}(t,x,\varphi) &= -\tau_{\mathrm{s}} u_{\mathrm{s}}(t,x,\varphi) + \int\limits_{\Omega} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \omega_{\mathrm{s}}(x,\varphi,y,\psi) f_{\mathrm{s}}(u_{\mathrm{s}}(t,y,\psi))d\psi dy + \nu_{\mathrm{s}} f_{\mathrm{d}}(u_{\mathrm{d}}(t,x)).
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

Здесь $u_{\mathrm{d}}(t,x)$ и $u_{\mathrm{s}}(t,x,\varphi)$ — уровни активности, соответственно, ориентационно-независимого глубокого слоя и ориентационно-зависимого поверхностного слоя зрительной коры. Скорости процессов активации в слоях определяются временными константами τ_{d} и τ_{s}, связи нейронов внутри каждого из слоев формализуются при помощи функций ω_{d} и ω_{s}. Степень воздействия активности глубокого слоя на активность поверхностного слоя представлена коэффициентом ν_{d}, степень обратно направленного воздействия — коэффициентом ν_{s}. Функции $f_{\mathrm{d}}, f_{\mathrm{s}}$ — вероятностные функции активации в глубоком и поверхностном слоях модели, соответственно. В математической нейробиологии стандартно предполагается, что функции связи ω_i являются экспоненциально убывающими функциями расстояния в нейронном поле (или линейными комбинациями таких функций), функции активации f_i представлены непрерывными функциями сигмоидальной формы $(i = \mathrm{d}, \mathrm{s})$.

Рассмотрим формализацию воздействия на активность функциональной микроструктуры зрительной коры в виде следующей задачи импульсного управления в задаче Коши для системы (0.1) с начальным условием $(u_{\mathrm{d}}(0,x), u_{\mathrm{s}}(0,x,\varphi)) = (\hat{u}_{\mathrm{d}}(x), \hat{u}_{\mathrm{s}}(x,\varphi))$:

$$
\begin{aligned}
u_{\mathrm{d}}(t,x) = \hat{u}_{\mathrm{d}}(x) &+ \int_0^t \int_\Omega e^{-\tau_{\mathrm{d}}(t-s)} \omega_{\mathrm{d}}(x,y) f_{\mathrm{d}}(u_{\mathrm{d}}(t,y))\,dy\,ds \\
&+ \int_0^t \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tau_{\mathrm{d}}(t-s)} \nu_{\mathrm{d}} f_{\mathrm{s}}(u_{\mathrm{s}}(t,x,\psi))\,d\psi\,ds, \\
u_{\mathrm{s}}(t,x,\varphi) = \hat{u}_{\mathrm{s}}(x,\varphi) &+ \int_0^t \int_\Omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tau_{\mathrm{s}}(t-s)} \omega_{\mathrm{s}}(x,\varphi,y,\psi) f_{\mathrm{s}}(u_{\mathrm{s}}(t,y,\psi))\,d\psi\,dy\,ds \\
&+ \int_0^t e^{-\tau_{\mathrm{s}}(t-s)} \nu_{\mathrm{s}} f_{\mathrm{d}}(u_{\mathrm{d}}(t,x))\,ds + \mathcal{U}(t,x,\varphi).
\end{aligned}
\tag{0.2}
$$

Здесь $\mathcal{U} = \mathcal{U}(t,x,\varphi)$ — импульсное управление, которое может иметь разрывы по переменной времени t.

В данной работе получены результаты об однозначной разрешимости системы (0.2) и непрерывной зависимости решения от управления $\mathcal{U}$.

1. Основной результат

Обозначим через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, через $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное векторное пространство с нормой $|\cdot|$. Для компакта $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R}^2)$ пространство непрерывных функций $\mathrm{v} : \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{\varphi \to -\frac{\pi}{2}+0} \mathrm{v}(\cdot,\varphi) \equiv \mathrm{v}(\cdot, \frac{\pi}{2})$, с нормой $\|\mathrm{v}\|_{C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R}^2)} = \max\limits_{x\in\Omega, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |\mathrm{v}(x,\varphi)|$.

Относительно системы (0.2) будем предполагать, что

$(\mathbf{A}_\omega)$ Функции связи $\omega_{\mathrm{d}} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega_{\mathrm{s}} : \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ непрерывны, функция ω_{s} интегрируема (по Лебегу) по четвертому аргументу и удовлетворяет условию $\lim\limits_{\varphi \to -\frac{\pi}{2}+0} \omega_{\mathrm{s}}(\cdot,\varphi,\cdot,\cdot) \equiv \omega_{\mathrm{s}}(\cdot, \frac{\pi}{2}, \cdot, \cdot)$.

$(\mathbf{A}_f)$ Функции активации $f_{\mathrm{d}}, f_{\mathrm{s}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ липшицевы.

$(\mathbf{A}_{\mathcal{U}})$ Управление $\mathcal{U}$ имеет вид: $\mathcal{U}(t,x,\varphi) = \sum\limits_{\forall k} \chi_{A_k}(t) \vartheta_k(x,\varphi)$, $A_k \subset [0,\infty)$ – полуинтервалы вида $A_k = [a_k, b_k)$, такие что $b_k \le a_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$; χ_{A_k} – характеристическая функция множеста A_k; функции $\vartheta_k \in C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$, $\vartheta_k(\cdot,\cdot) \not\equiv 0$,

$k \in \mathbb{N}$, формализуют импульсные воздействия (естественным образом предполагаем, что если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеет место $b_k = a_{k+1}$, то $\vartheta_k \neq \vartheta_{k+1}$); при этом для любого $T > 0$ существует такое $k_T \in \mathbb{N}$, что $\max\{k : A_k \cap [0,T] \neq \emptyset\} \leq k_T$.

Определим множество $\mathcal{M}_\infty = \mathcal{M}_\infty([0,\infty), C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R}^2))$ функций, имеющих вид $\mathrm{u} = (\xi, \zeta + \eta)^T$, где функции $\xi : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$, $\zeta : [0,\infty) \times \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ непрерывны, функция $\eta : [0,\infty) \times \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $\eta(t,x,\varphi) = \sum\limits_{\forall k} \chi_{A_k}(t)\vartheta_k(x,\varphi)$, удовлетворяет условию $(\mathbf{A}_{\mathcal{U}})$.

Для произвольного $T > 0$ обозначим через $\mathcal{M}_T = \mathcal{M}_T([0,T], C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R}^2))$ множество сужений на $[0,T]$ функций из $\mathcal{M}_\infty$. Покажем, что множество $\mathcal{M}_T$ образует полное метрическое пространство относительно метрики

$$\rho_{\mathcal{M}([0,T])}(\mathrm{u}^1, \mathrm{u}^2) = \|\xi^1 - \xi^2\|_{C([0,T]\times\Omega,\mathbb{R})} + \|\zeta^1 - \zeta^2\|_{C([0,T]\times\Omega\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\mathbb{R})}$$
$$+ \int\limits_0^T \Big\| \sum_{k:A_k^1\cap[0,T]\neq\emptyset} \chi_{A_k^1}(t)\vartheta_k^1(\cdot,\cdot) - \sum_{k:A_k^2\cap[0,T]\neq\emptyset} \chi_{A_k^2}(t)\vartheta_k^2(\cdot,\cdot)\Big\|_{C(\Omega\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\mathbb{R})} dt. \qquad (1.1)$$

Будем говорить, что $\kappa \in C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ является существенным значением отображения $\mathcal{U} : [0,T] \to C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$, если найдется такое $t_0 \in [0,T]$, что $\kappa = \mathcal{U}(t_0)$, и существует такое $\delta > 0$, что $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t_0)$ для всех $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0,T]$.

По определению, каждое управление задается совокупностью полуинтервалов A_k (отвечающих временным интервалам предъявления стимулов) и соответствующих им ненулевых существенных значений ϑ_k отображения $\mathcal{U} : [0,T] \to C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ (характеризующих предъявляемые стимулы). Пусть отображение $\mathcal{U}_{(\mathrm{K}+1)} : [0,T] \to C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ имеет $\mathrm{K}+1$ ненулевых существенных значений на отрезке $[0,T]$. Покажем, что оно не может быть пределом последовательности управлений, имеющих не более K ненулевых существенных значений на отрезке $[0,T]$. Выберем $\varepsilon < \mathrm{d}\mathfrak{M}$, где

$$\mathrm{d} = \min\Big\{ \min_{i=1,\ldots,\mathrm{K}} \big(\|\vartheta_i - \vartheta_{i+1}\|_{C(\Omega\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\mathbb{R})}\big), \min_{i=1,\ldots,\mathrm{K}+1} (\|\vartheta_i\|)\Big\},$$

$$\mathfrak{M} = \min\Big\{ \min_{k=1,\ldots,\mathrm{K}+1} \big(\mu(A_k)\big), \min_{\forall i} \big(\mu(D_i)\big)\Big\},$$

где $D_i \subset [0,T] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\mathrm{K}+1} A_k$. Мы получаем, что для любого отображения $\mathcal{U}_{\leq \mathrm{K}} : [0,T] \to C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$, имеющего не более K ненулевых существенных значений на отрезке $[0,T]$, выполнено неравенство $\int\limits_0^T \|\mathcal{U}_{(\mathrm{K}+1)}(t) - \mathcal{U}_{(\leq \mathrm{K})}(t)\|_{C(\Omega\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\mathbb{R})} dt > \varepsilon$.

Следовательно, отображение, имеющее на $[0,T]$ ровно $\mathrm{K}+1$ ненулевых существенных значений, не может быть пределом последовательности отображений, имеющих не более K ненулевых существенных значений на $[0,T]$, и множество $\mathcal{M}_T$ образует полное метрическое пространство относительно метрики (1.1).

Последнее означает, что множество $\mathcal{M}_\infty$ можно снабдить топологией сходимости по метрике (1.1) на каждом из его подмножеств $\mathcal{M}_T$, $T > 0$.

Будем считать глобальным решением системы (0.2) вектор-функцию $\mathrm{u} \in \mathcal{M}_\infty$, компоненты которой удовлетворяют уравнениям (0.2). Для всякого $T > 0$ назовем T-локальным решением (0.2) функцию $\mathrm{u}_T \in \mathcal{M}_T$, удовлетворяющую уравнениям (0.2) на множестве $[0,T] \times \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* $\mathbf{A}_f$ *и* $\mathbf{A}_\omega$. *Тогда для любого управления* $\mathcal{U}$, *удовлетворяющего условию* $\mathbf{A}_\mathcal{U}$, *существует единственное глобальное решение системы* (0.2), *и всякое* T *-локальное решение* (0.2) *является его частью. Пусть также при всех* $T>0$ *выполнено условие*

$$\int\limits_0^T \max_{x\in\Omega,\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \big|\mathcal{U}^i(t,x,\varphi)-\mathcal{U}^0(t,x,\varphi)\big|dt \to 0 \ \text{при}\ i\to\infty.$$

Тогда последовательность решений u^i, *соответствующих управлениям* $\mathcal{U}^i$, *сходится в топологии пространства* $\mathcal{M}_\infty$ *к решению* u^0, *соответствующему управлению* $\mathcal{U}^0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем систему (0.2) в виде:

$$\mathrm{u}(t,x,\varphi)=\hat{\mathrm{u}}(x,\varphi)+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(t,s,x,y,\varphi,\psi)F(\mathrm{u}(s,y,\psi))d\psi dy ds+\lambda(t,x,\varphi),$$

где

$$\mathrm{u}(t,x,\varphi)=\begin{pmatrix} u_\mathrm{d}(t,x)\\ u_\mathrm{s}(t,x,\varphi)\end{pmatrix},\quad \hat{\mathrm{u}}(x,\varphi)=\begin{pmatrix}\hat{u}_\mathrm{d}(x)\\ \hat{u}_\mathrm{s}(x,\varphi)\end{pmatrix},$$

$$\lambda(t,x,\varphi)=\begin{pmatrix}0\\ \sum\limits_{k:A_k\cap[0,T]\neq\emptyset}\chi_{A_k}(t)\vartheta_k(x,\varphi)\end{pmatrix},\quad F(\mathrm{u})=\begin{pmatrix} f_\mathrm{d}(\mathrm{u}_\mathrm{d})\\ f_\mathrm{s}(\mathrm{u}_\mathrm{s})\end{pmatrix},$$

$$W(t,s,x,y,\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} e^{-\tau_\mathrm{d}(t-s)} & 0\\ 0 & e^{-\tau_\mathrm{s}(t-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_\mathrm{d}(x,y)/\pi & \nu_\mathrm{s}\delta(x-y)\\ \nu_\mathrm{d}\delta(x-y) & \omega_\mathrm{s}(x,\varphi,y,\psi)/\pi\end{pmatrix},$$

где символом $\delta(\cdot)$ обозначена дельта-функция Дирака.

Зафиксируем произвольное $T>0$. Определим оператор $\mathcal{F}:\mathcal{M}_T\times\mathcal{M}_T\to\mathcal{M}_T$,

$$\big(\mathcal{F}(\mathrm{u},\lambda)\big)(t,x,\varphi)=\hat{\mathrm{u}}(x,\varphi)+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(t,s,x,y,\varphi,\psi)F(\mathrm{u}(s,y,\psi))d\psi dy ds+\lambda(t,x,\varphi)$$

и при произвольном $\lambda\in\mathcal{M}_T$ рассмотрим операторное уравнение (относительно неизвестного $\mathrm{u}\in\mathcal{M}_T$)

$$\mathrm{u}=\mathcal{F}(\mathrm{u},\lambda). \tag{1.2}$$

Покажем справедливость следующих утверждений.

1. Существуют такие $q<1$, $\sigma>0$, что для любого $\hat{t}\in[0,T]$ и всех $\mathrm{u}^1,\mathrm{u}^2\in\mathcal{M}_T$, $\mathrm{u}^1(\hat{t},\cdot,\cdot)\equiv\mathrm{u}^2(\hat{t},\cdot,\cdot)$ имеет место

$$\max_{t\in[\hat{t},\hat{t}+\sigma],\,x\in\mathbb{R},\,\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\Big|\int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}+\sigma}\int\limits_\Omega\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(t,s,x,y,\varphi,\psi)F(\mathrm{u}^1(s,y,\psi))d\psi dy ds$$
$$-\int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}+\sigma}\int\limits_\Omega\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(t,s,x,y,\varphi,\psi)F(\mathrm{u}^2(s,y,\psi))d\psi dy ds\Big|$$
$$\le q\max_{t\in[\hat{t},\hat{t}+\sigma],x\in\mathbb{R},\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}|\mathrm{u}^1(t,x,\varphi)-\mathrm{u}^2(t,x,\varphi)|.$$

2. Для произвольного $u \in \mathcal{M}_T$ отображение $\mathcal{F} : \mathcal{M}_T \times \mathcal{M}_T \to \mathcal{M}_T$ непрерывно в точке (u, λ_0).

Покажем, что первое утверждение справедливо. Имеем

$$\max_{t\in[\hat{t},\hat{t}+\sigma],x\in\mathbb{R},\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \Big| \int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}+\sigma} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(t,s,x,y,\varphi,\psi) F(\mathrm{u}^1(s,y,\psi)) d\psi dy ds \\ - \int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}+\sigma} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(t,s,x,y,\varphi,\psi) F(\mathrm{u}^2(s,y,\psi)) d\psi dy ds \Big|$$

$$\leq \int\limits_{\hat{t}}^{\hat{t}+\sigma} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \max_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R},\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} (W(t,s,x,y,\varphi,\psi)) \\ \times \max_{t\in[\hat{t},\hat{t}+\sigma],x\in\mathbb{R},\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \Big| F(\mathrm{u}^1(s,y,\psi)) - F(\mathrm{u}^2(s,y,\psi)) \Big| d\psi dy ds \\ \leq \sigma G \ell \max_{t\in[\hat{t},\hat{t}+\sigma],x\in\mathbb{R},\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} |\mathrm{u}^1(t,x,\varphi) - \mathrm{u}^2(t,x,\varphi)|,$$

где ℓ — константа Липшица отображения $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

За счет выбора $\sigma > 0$ для $q = \sigma G \ell$ можно достичь неравенства $q < 1$, следовательно, утверждение 1 доказано.

В силу задания метрики пространства $\mathcal{M}_T$ равенством (1.1) для любого $\mathrm{u} \in \mathcal{M}_T$ имеет место $\rho_{\mathcal{M}_T}(\mathcal{F}(\mathrm{u}, \lambda_i), \mathcal{F}(\mathrm{u}, \lambda_0)) \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$. То есть, утверждение 2 также справедливо.

Определим семейство v отношений эквивалентности $v(\gamma)$, $\gamma \in [0,1]$, на множестве $\mathcal{M}_T$ как равенство функций $\mathrm{u} : [0,T] \to C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]), \mathbb{R}^2)$ на отрезках $[0, \gamma T]$. С учетом этого определения, утверждения 1 и 2 позволяют применить к операторному уравнению (1.2) теорему 2.2 работы [8], гарантирующую существование единственного решения этого операторного уравнения и, соответственно, системы (0.2), а также сходимость последовательности решений u^i к решению u^0 при сходимости соответствующих функций управления $\mathcal{U}^i$ к функции $\mathcal{U}^0$. $\square$

References

[1] D. H. Hubel, T. N. Wiesel, “Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat’s visual cortex”, *The Journal of Physiology*, **160**:1 (1962), 106–154.

[2] D. Y. Ts’o, R. D. Frostig, E. E. Lieke, A. Grinvald, “Functional organization of primate visual cortex revealed by high resolution optical imaging”, *Science*, **249**:4967 (1990), 417–420.

[3] T. D. Fehervari, Y. Okazaki, H. Sawai, T. Yagi, “In vivo voltage-sensitive dye study of lateral spreading of cortical activity in mouse primary visual cortex induced by a current impulse”, *PLoS ONE*, **10**:7 (2015), e0133853.

[4] Y. Liang, J. Liang, C. Song, M. Liu, T. Knopfel, P. Gong, C. Zhou, “Complexity of cortical wave patterns of the wake mouse cortex”, *Nature Communications*, **14**:1434 (2023), 1434(2023).

[5] P. C. Bressloff, J. D. Cowan, “An amplitude equation approach to contextual effects in visual cortex”, *Neural Computation*, **14**:3 (2002), 493–525.

[6] P. C. Bressloff, “Spatiotemporal dynamics of continuum neural fields”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **45**:3 (2012), 033001.

[7] E. Burlakov, I. Malkov, “On Bi-Laminar Neural Field Models of Electrical Activity in the Primary Visual Cortex”, *Advances in Systems Science and Applications*, **23**:3 (2023), 177–190.

[8] E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskiy, “On well-posedness of neural field equations with impulsive control”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **21**:1 (2016), 16–27.

Информация об авторах

Бурлаков Евгений Олегович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник института X-BIO, Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Верхлютов Виталий Михайлович, кандидат медицинских наук, старший научный сотрудник лаборатории высшей нервной деятельности человека, Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: verkhliutov@ihna.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8353-6884

Мальков Иван Николаевич, аспирант, институт математики и компьютерных наук, Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Бурлаков Евгений Олегович
E-mail: eb_@bk.ru

Поступила в редакцию 20.09.2023 г.
Поступила после рецензирования 25.11.2023 г.
Принята к публикации 11.03.2024 г.

Information about the authors

Evgenii O. Burlakov, PhD, Researcher at the Insitute X-BIO, Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Vitaly M. Verkhlyutov, MD, Senior Researcher of Laboratory of Human Higher Nervous Activity, Institute of Higher Nervous Activity and Neurophysiology of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: verkhliutov@ihna.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8353-6884

Ivan N. Malkov, Post-Graduate Student, Institute of Mathematics and Computer Science, Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-5591

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgenii O. Burlakov
E-mail: eb_@bk.ru

Received 20.09.2023
Revieued 25.11.2023
Accepted for press 11.03.2024